コンパクト群上の可微分関数(群の表現と非可換調和解析)

枝松, 孝

数理解析研究所講究録
481巻 1983年 64-80

コンパクト群上の可微分関数

日大 理工　枝松 孝
Edamatsu Takashi

リー群上の C^n 級関数の概念が，1径数部分群を使って，任意のコンパクト群 G の場合に，自然に，一般化できることをしめす $(n=\infty, 1, 2, \cdots)$。次に，そのような関数の空間 $\mathcal{E}_n(G)$ の構造をしらべる。

次の諸記号を本文中で断りなしに使用する。

G　コンパクト群，

$\hat{G}=\{\sigma\}$　G の unitary dual，

$U(\sigma)$　class $\sigma\in\hat{G}$ の代表として選んだユニタリ行列表現，固定される。

d_σ　$U(\sigma)$ の次元，

$\mathfrak{N}(G)$　G の閉正規部分群全体の集合，

$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$　実及び複素数体，

$\mathfrak{R}(H)$　位相群 H の1径数部分群（連続準同型 $\mathbb{R}\longrightarrow$

$\hat{G}$) 全体の集合,

$c(H)$　位相群 H の連結成分（$\ni$ 単位元）。

§1 コンパクト群のリー環と1径数部分群

1) 各 $\sigma \in \hat{G}$ に対して $\mathfrak{M}(d_\sigma, \mathbb{C})$ は d_σ 次複素行列全体が通常の行列演算と位相に関してなす位相$*$-代数とし，その直積 $\prod_{\sigma \in \hat{G}} \mathfrak{M}(d_\sigma, \mathbb{C})$ を $\sum(\hat{G})$ で表わす。従って，$\sum(\hat{G})$ は局所凸位相を備えた$*$-代数である。$I = (I(\sigma))_{\sigma \in \hat{G}}$, $I(\sigma)$ は d_σ 次単位行列，は $\sum(\hat{G})$ の単位元である。

さて，テンソル積表現 $\sigma \otimes \sigma'$ ($\sigma, \sigma' \in \hat{G}$) の既約分解は，各 class $\in \hat{G}$ の代表をもちいると，次の形で与えられる：

(1.1)
$$U(\sigma) \otimes U(\sigma') = V_{\sigma,\sigma'}^{-1} \left(U(\sigma_1) \oplus \cdots \oplus U(\sigma_m) \right) V_{\sigma,\sigma'},$$

$V_{\sigma,\sigma'}$ は $d_\sigma d_{\sigma'}$ 次ユニタリ行列.

<u>定義 1.1</u> $\sum(\hat{G})$ の元 $T = (T(\sigma))_{\sigma \in \hat{G}}$ が次の条件を満足するとき，'条件 (C1) を満足する' という：

$\sigma \otimes \sigma'$ ($\sigma, \sigma' \in \hat{G}$) の既約分解が (1.1) で与えられるならば，

$$T(\sigma) \otimes T(\sigma') = V_{\sigma,\sigma'}^{-1} \left(T(\sigma_1) \oplus \cdots \oplus T(\sigma_m) \right) V_{\sigma,\sigma'}$$

が成立する。

これに対して，次の場合には '条件 (C2) を満足する' という：

(1.1) のもとで，

$$T(\sigma) \otimes I(\sigma') + I(\sigma) \otimes T(\sigma') = V_{\sigma,\sigma'}^{-1} \left(T(\sigma_1) \oplus \cdots \oplus T(\sigma_m) \right) V_{\sigma,\sigma'}. \ \blacksquare$$

いま，$T\in\Sigma(G)$ に対して，$\exp T\in\Sigma(G)$ を成分ごとに行列の exponential をとることによって定義する。次の補題が成立する。

<u>補題1.1</u>　次の2条件は同値である。

(a)　$T\,(\in\Sigma(G))$ が条件(C2)を満足する。

(b)　すべての $t\in\mathbb{R}$ に対して，$\exp tT$ が条件(C1)を満足する。

<u>定義1.2</u>

$\hat{\hat{G}}=\{T\in\Sigma(G)$; 条件(C1)と $T^*T=I$ を満足する$\}$

$\Lambda(G)=\{H\in\Sigma(G)$; 条件(C2)と $H^*=-H$ を満足する$\}$ ∎

$\hat{\hat{G}}$ は G のいわゆる bidual で，$\Sigma(G)$ での積と位相に関して位相群になる。$x\in G$ に対して，$U_x=(U_x(\sigma))_{\sigma\in\hat{G}}\ (\in\Sigma(G))$ とおけば，写像

$$\iota_G:\quad G\ni x\longmapsto U_x$$

は位相群 $\hat{\hat{G}}$ の上への同型写像である（淡中双対定理）。一方，$\Lambda(G)$ が成分ごとの実線形演算と bracket 積により実リー環になることは容易に確認できる。但し，一般には無限次元である。補題1.1と双対定理から，次の補題が従う。

<u>補題1.2</u>　写像

$$\Lambda(G)\ni H\longmapsto \exp tH\quad(t\in\mathbb{R})$$

は $\mathcal{R}(\hat{\hat{G}})$ への bijection である。 ∎

$G\cong\hat{\hat{G}}$ であるから，補題1.2 はリー環 $\Lambda(G)$ から $\mathcal{R}(G)$ への bijection を与えているとみなせる。これの逆写像を h_G で表

わすことにする。すなわち、

(1.2) $\qquad \hat{\imath}_G(\alpha(t)) = \exp t h_G(\alpha) \qquad (\alpha \in R(G),\ t \in \mathbb{R})$.

<u>注意</u> Gがリー群であるとき、$\Lambda(G)$や写像$\Lambda(G) \ni H \longmapsto \exp H \in \hat{G}$が、リー群に対する旧来のリー環や指数写像と同じものであることは、すぐに確められる。Gが可換であるときは、$\hat{G}$は群であって、$\Lambda(G)$は準同型写像$\hat{G} \longrightarrow \sqrt{-1}\mathbb{R}$の全体がつくる可換実リー環である。

2) 正規部分群及び商群のリー環と1径数部分群について考察しておかねばならない。$N \in \mathfrak{N}(G)$に対して

$$A(\hat{G}, N) = \{\sigma \in \hat{G}\,;\ U_x(\sigma) = I(\sigma)\ \ (x \in N)\}$$

とおく。G/Nのunitary dual $(G/N)^\wedge$は、自然な仕方で$A(\hat{G}, N)$とidentifyすることにする。また、class $\sigma \in (G/N)^\wedge = A(\hat{G}, N)$の代表としては、表現$G/N \ni xN \longmapsto U_x(\sigma)$ $(x \in G)$を選ぶことにする。$\Sigma(G/N) = \prod_{\sigma \in A(\hat{G}, N)} \mathfrak{M}(d_\sigma, \mathbb{C})$であることに注意しよう。$(G/N)^\wedge$ (resp. $\Lambda(G/N)$)は、$A(\hat{G}, N)$上の行列値関数のうち、そこで(C1)とunitary条件(resp. (C2)とskew-hermite条件)を満足するものの全体から成る。さて、次の記号を導入する。

r_N 制限写像 $\Sigma(G) \ni T \longmapsto T|_{A(\hat{G}, N)} \in \Sigma(G/N)$,

π_N 自然準同型 $G \longmapsto G/N$,

$\overline{\pi_N}$ $R(G) \ni \alpha \longmapsto \pi_N \circ \alpha \in R(G/N)$.

<u>補題1.3</u>　$r_N|_{\hat{G}}$ は位相群 $(G/N)^{\wedge}$ の上への，$r_N|_{\Lambda(G)}$ はリー環 $\Lambda(G/N)$ の<u>中への</u>準同型であって，次の図式がいずれも可換である。

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "\pi_N"] \arrow[dr, "i_G"'] & & G/N \arrow[dr, "i_{G/N}"] & \\
& \hat{G} \arrow[rr, "r_N"'] & & (G/N)^{\wedge}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
R(G) \arrow[rr, "\overline{\pi}_N"] \arrow[dr, "h_G"'] & & R(G/N) \arrow[dr, "h_{G/N}"] & \\
& \Lambda(G) \arrow[rr, "r_N"'] & & \Lambda(G/N)
\end{tikzcd}$$
∎

この補題は容易に検証できる。実は，写像 $r_N|_{\Lambda(G)}$ の onto 性が成立するのである。

<u>補題1.4</u> ([3], Theorem 4)　$\overline{\pi}_N$ は $R(G)$ を $R(G/N)$ の上へうつす。同じことだが，$r_N|_{\Lambda(G)}$ は $\Lambda(G/N)$ の上への準同型である。∎

写像 $r_N|_{\Lambda(G)}$ の核を $\Lambda_N(G)$ とかく。すなわち，

$$\Lambda_N(G)=\{H\in\Lambda(G)\,;\ H(\sigma)=0\ \ (\sigma\in A(G,N))\}.$$

そうすれば，補題1.4から，

<u>Corollary</u>　$\Lambda(G/N)\cong\Lambda(G)/\Lambda_N(G).$

更に，次の事実を証明できる。

<u>補題1.5</u>　$R(N)=\{\alpha\in R(G)\,;\ h_G(\alpha)\in\Lambda_N(G)\}$,

$\Lambda(N)\cong\Lambda_N(G)$　(リー環として).

3)　この稿の目的のためには、$\Lambda(G)$と$R(G)$との間の1対1対応の存在のほかに、$\Lambda(G)$が適切な位相的性質をもつことが必要である。

<u>定義1.3</u>　$\mathfrak{N}_0(G)=\{N\in\mathfrak{N}(G)\ ;\ G/N$ はリー群または有限群$\}$. ∎

$\mathfrak{N}_0(G)$は下方有向族である。いま、$N\subseteq N'$なる$N, N'\in\mathfrak{N}_0(G)$に対して、$\pi_{N'N}$で自然準同型$G/N\longrightarrow G/N'$を、$\mathcal{I}_{N'N}$で制限写像$\Lambda(G/N)\ni H\longmapsto H|_{A(G/N')}\in\Lambda(G/N')$を表わすことにする。すると、リー群(または有限群)の逆系$\{G/N, \pi_{N'N}\}$と、リー環の逆系$\{\Lambda(G/N), \mathcal{I}_{N'N}\}$が得られる。$G\cong\varprojlim\{G/N, \pi_{N'N}\}$は周知である(構造定理)。さて、$\Lambda(G/N)$ $(N\in\mathfrak{N}_0(G))$がリー群(または有限群)G/Nの通常の意味でのリー環に同型であることは、すでに注意してある。こゝで、次の補題が成立する。

<u>補題1.6</u>　(i) 写像$\Psi:\Lambda(G)\ni H\longmapsto(\mathcal{I}_N(H))_{N\in\mathfrak{N}_0(G)}$はリー環$\varprojlim\{\Lambda(G/N)\ ;\ \mathcal{I}_{N'N}\}$の上への同型写像である。

(ii) $\mathcal{I}_{N'N}$は$\pi_{N'N}$の微分である。 ∎

従って結局、$\Lambda(G)$は、Gに対する構造定理から自然にひきだされるリー環である。このことから、特に、次の事実が得られる:

$\Lambda(G)$の次元は、コンパクト空間Gの被覆次元に一致する。$\Lambda(G)$が有限次元であるためには、$\mathfrak{N}_0(G)$が

完全不連結な member を含むことが必要十分である。

以下で、G の次元といえば、被覆次元つまり $\Lambda(G)$ の次元を意味するものとする。

<u>補題1.7</u>　$\Lambda(G)$ は $\Sigma(G)$ の相対位相に関して Baire space である。従って、実線形空間として、樽型局所凸空間である。

(証明)　補題1.6で、$\{\Lambda(G/N), \varphi_{N'N}\}$ を有限次元局所凸空間の逆系とみなして、その極限を Λ_1 で表わすと、写像 Ψ は $\Lambda(G)$ から Λ_1 の上への同相写像になる。他方、積空間 $\prod_{N\in\mathcal{N}_0(G)}\Lambda(G/N)$ は $\mathbb{R}^I$ の型であり、Λ_1 はこれの閉線形部分空間であるから、やはり $\mathbb{R}^J$ の型である。これは Baire space である。局所凸空間が Baire space であれば、一般に樽型である。証了。

この稿では詳しく述べないが、次の補題も、G 上の連続的微分可能関数の空間の構造をしらべるとき必要である。

<u>補題1.8</u> ([3], Theorem 5)

$$\bigcup\{\alpha(\mathbb{R})\ ;\ \alpha\in R(G)\}\ \text{は}\ C(G)\ \text{で dense.}$$

§2　G 上の C^n-class の定義 $(n=\infty,1,2,\cdots)$

1)　f は G 上の $\mathbb{C}$-値関数，$\alpha\in R(G)$，$x\in G$ とする。$f(x\alpha(t))$ (resp. $f(\alpha(-t)x)$) が $t\in\mathbb{R}$ の関数として $t=0$ で

微分可能のとき，

$$d_\alpha^{(r)} f(x) = \frac{d}{dt} f(x\alpha(t))\Big|_{t=0}$$

$$\left(\text{resp. } d_\alpha^{(\ell)} f(x) = \frac{d}{dt} f(\alpha(-t)x)\Big|_{t=0}\right)$$

とおいて，この値を f の α に関する，x での右(resp.左)微分係数とよぶ。これが，すべての $x\in G$ に対して存在するとき，G 上で定義される関数 $x \longrightarrow d_\alpha^{(r)} f(x)$ (resp. $d_\alpha^{(\ell)} f(x)$) を f の α に関する右(resp.左)導関数とよんで，$d_\alpha^{(r)} f$ (resp. $d_\alpha^{(\ell)} f$) で表わす。

<u>定義 2.1</u>　$\mathcal{E}_0(G)$ で G 上の $\mathbb{C}$-値連続関数全体の空間を表わす。$n=1,2,\cdots$ に対して $\mathcal{E}_n^{(r)}(G)$ (resp. $\mathcal{E}_n^{(\ell)}(G)$) は，$\mathcal{E}_0(G)$ の元 f で，n 階までのすべての右(resp.左)導関数

$$d_{\alpha_1}^{(r)} f,\ d_{\alpha_2}^{(r)} d_{\alpha_1}^{(r)} f,\ \cdots,\ d_{\alpha_n}^{(r)} \cdots d_{\alpha_2}^{(r)} d_{\alpha_1}^{(r)} f$$

$$\left(\text{resp. } d_{\alpha_1}^{(\ell)} f,\ d_{\alpha_2}^{(\ell)} d_{\alpha_1}^{(\ell)} f,\ \cdots,\ d_{\alpha_n}^{(\ell)} \cdots d_{\alpha_2}^{(\ell)} d_{\alpha_1}^{(\ell)} f\right)$$

($\alpha_1,\cdots,\alpha_n \in R(G)$ は任意) が存在して $\in \mathcal{E}_0(G)$ となるもの全体の集合を表わす。(当然，$\mathcal{E}_1^{(r)}(G) \supseteq \mathcal{E}_2^{(r)}(G) \supseteq \cdots$，$\mathcal{E}_1^{(\ell)}(G) \supseteq \mathcal{E}_2^{(\ell)}(G) \supseteq \cdots$.) 更に，$\mathcal{E}_\infty^{(r)}(G) = \bigcap_{n\geq 1} \mathcal{E}_n^{(r)}(G)$，$\mathcal{E}_n^{(\ell)}(G) = \bigcap_{n\geq 1} \mathcal{E}_n^{(\ell)}(G)$ とおく。

<u>注意</u>　上の定義で，f の各階導関数の存在に加えて，f 自身の連続性を仮定したが，これは余分な仮定ではない。実際，すべての階の左右導関数の存在と連続性を仮定しても，原関数の連続性は必ずしも従わない（G が連結であっても）。∎

$\mathcal{E}_n^{(r)}(G)$ と $\mathcal{E}_n^{(l)}(G)$ $(n=\infty,1,2,\cdots)$ が $\mathbb{C}$ 上の algebra をなすことは明らかである。G がリー群ならば、$\mathcal{E}_n^{(r)}(G)$ と $\mathcal{E}_n^{(l)}(G)$ は一致して、通常の C^n-class を与える。実は、一般の G の場合にも、この両者は一致するのである。

Theorem 1　各 $n=\infty,1,2,\cdots$ に対して、

$$\mathcal{E}_n^{(r)}(G)=\mathcal{E}_n^{(l)}(G)。\quad \blacksquare$$

この定理を証明した上で、我々は、$\mathcal{E}_n^{(r)}(G)\,(=\mathcal{E}_n^{(l)}(G))$ を G 上の C^n-class と考える。それは、リー群の場合の自然な拡張になる。Theorem 1 なしに、$\mathcal{E}_n^{(r)}(G)\cap\mathcal{E}_n^{(l)}(G)$ を G 上の C^n-class と考えることは意味がない。そのときには、例えば'微分作用素' $d_\alpha^{(r)}d_\beta^{(l)}d_\gamma^{(r)}$ を $\mathcal{E}_n^{(r)}(G)\cap\mathcal{E}_n^{(l)}(G)$ $(n\geq 3)$ 上に作用させ得るという保証がない。Theorem 1 が確立されたならば、明らかに、$d_{\alpha_1}^{(r)}\cdots d_{\alpha_p}^{(r)}d_{\beta_1}^{(l)}\cdots d_{\beta_q}^{(l)}$ は $\mathcal{E}_n^{(r)}(G)=\mathcal{E}_n^{(l)}(G)$ $(n\geq p+q)$ 上に作用し得る。しかも、その際、$d_\alpha^{(r)}$ と $d_\beta^{(l)}$ は commute する。

2)　Theorem 1 の証明については後で述べるが、当面次のように定義しておく。

定義 2.2　　$\mathcal{E}_n(G)=\mathcal{E}_n^{(r)}(G)\cap\mathcal{E}_n^{(l)}(G)$　　$(n=\infty,1,2,\cdots)$

とおく。更に、$N\in\mathfrak{N}(G)$ に対して、$\mathcal{E}_n(G)$ の subalgebra $\mathcal{E}_n(G,N)$ を次のように定義する：

$$\mathcal{E}_n(G,N)=\{f\in\mathcal{E}_n(G)\,;\ f(xy)=f(x)\quad(x\in G,\ y\in N)\}.$$

補題2.1 写像: $\mathcal{E}_n(G/N)\ni g \longmapsto g\circ\pi_N$ は algebra $\mathcal{E}_n(G,N)$ の上への isomorphism である ($N\in\mathfrak{N}(G)$)。

(証明. 補題1.4 による。) ∎

特に, $N\in\mathfrak{N}_0(G)$ のとき、$\mathcal{E}_\infty(G,N)$ はリー群(または有限群) G/N 上の C^∞-class $\mathcal{E}_\infty(G/N)$ と identify できるわけである。

定義2.3 $\mathcal{D}(G)=\bigcup\{\mathcal{E}_\infty(G,N)\,;\,N\in\mathfrak{N}_0(G)\}$. ∎

$\mathcal{D}(G)$ は $\mathcal{E}_\infty(G)$ の subalgebra である。G上の trigonometric polynomial はすべて $\mathcal{D}(G)$ に含まれる。$\mathcal{D}(G)$の元は、Bruhat の意味での、G上の regular function に外ならない([1], Definition 1)。

3) Theorem 1 の証明の論点のみ説明する(詳細は [2], §2)。本質的な部分は $n=1$ の場合, つまり $\mathcal{E}_1^{(r)}(G)=\mathcal{E}_1^{(l)}(G)$ をしめすことにある。$\mathcal{E}_1^{(r)}(G)\subseteq\mathcal{E}_1^{(l)}(G)$ をしめせば, 逆の包含も同様にしてしめされる。

さて、$x\in G$ と $\alpha\in R(G)$ に対して, $x^{-1}\alpha x$ で $R(G)$ の元: $\mathbb{R}\ni t \longmapsto x^{-1}\alpha(t)x$ を表わすことにすれば, $f(\alpha(-t)x)=f(x\cdot(x^{-1}\alpha x)(-t))$ (fは任意)。これから次のことは直ちにわかる:

$d_\beta^{(r)}f$ がすべての $\beta\in R(G)$ に対して存在するならば, $d_\alpha^{(l)}f$ もすべての $\alpha\in R(G)$ に対して存在して,

$$d_\alpha^{(l)}f(x)=-d^{(r)}_{x^{-1}\alpha x}f(x)\qquad(x\in G).$$

故に、$\mathcal{E}_1^{(r)}(G) \subseteq \mathcal{E}_1^{(l)}(G)$ には、次の命題の成立が必要十分である。

<u>命題A</u>　$f \in \mathcal{E}_1^{(r)}(G)$, $\alpha \in R(G)$ のとき、G 上の関数
$$x \longmapsto d^{(r)}_{x^{-1}\alpha x} f(x)$$
は連続である。▨

この命題の証明に、$R(G)$ と $\Lambda(G)$ との間に1対1の対応が存在すること、$\Lambda(G)$ が局所凸な位相線形構造をもち、同時に Baire space であること（補題1.7）を本質的にもちいる。まず次の定義を設ける。

<u>定義2.4</u>　bijection $h_G : R(G) \longrightarrow \Lambda(G)$ を介して、$\Lambda(G)$ の局所凸線形空間の構造を $R(G)$ に移植する。（従って、$R(G)$ は Baire space かつ樽型局所凸空間である。）▨

この定義のもとで、写像 $G \times R(G) \ni (x, \alpha) \longmapsto x^{-1}\alpha x \in R(G)$ は連続である。それは、$h_G(x^{-1}\alpha x) = U_{x^{-1}} h_G(\alpha) U_x$ と、$\Lambda(G)$ の位相の定義から従う。よって、命題Aを得るには、次の補題を証明すれば十分である。

<u>補題2.2</u>　$f \in \mathcal{E}_1^{(r)}(G)$ のとき、写像
$$R(G) \times G \ni (\alpha, x) \longmapsto d^{(r)}_\alpha f(x) \in \mathbb{C}$$
は連続である。▨

これを次の順序で証明する。$\mathcal{E}_1^{(r)}(G)$ は複素共役に関して閉じているので、f は real-valued であると仮定してよい。

(I)　$\theta \in \mathcal{D}(G)$, $x \in G$ とせよ。$\theta = g \circ \pi_N$ なる $N \in \mathcal{N}_0(G)$ と g

$\in \mathcal{E}_\infty(G/N)$ をとると（補題2.1），$\alpha \in R(G)$ に対して

$$d_\alpha^{(r)}\theta(x) = d_{\overline{\pi_N}(\alpha)}^{(r)} g(\pi_N(x))$$

が成立する。写像 $R(G) \ni \alpha \longmapsto \overline{\pi_N}(\alpha) \in R(G/N)$ は $\mathbb{R}$-linear であり（補題1.3），G/N はリー群（または有限群）であることから、写像 $R(G) \ni \alpha \longmapsto d_\alpha^{(r)}\theta(x) \in \mathbb{C}$ が $\mathbb{R}$-linear であることがわかる。f を regular 関数で'近似'することによって、このことから、写像

$$\varphi_x : R(G) \ni \alpha \longmapsto d_\alpha^{(r)} f(x) \in \mathbb{R}$$

の線形性がしめされる。

（II）$R(G)$ の位相の定義と，それが Baire space であることをもちいて、linear form φ_x の連続性を証明する。

（III）（I），（II）により，$\{\varphi_x ; x \in G\}$ は $R(G)'$（$R(G)$ の dual space）の subset である。この set が単純有界であることは明らか，しかも $R(G)$ は樽型である。よって、この set は等連続。補題2.2 は、このことから直ちに検証できる。 ∎

これで Theorem 1 が確認されたので，$\mathcal{E}_n(G) = \mathcal{E}_n^{(r)}(G) = \mathcal{E}_n^{(\ell)}(G)$ である。

§3 空間 $\mathcal{E}_n(G)$ の構造（$n = \infty, 1, 2, \cdots$）

空間 $\mathcal{E}_n(G)$ の構造について結論だけ述べる（詳細は [2]，§3）。

1) $\mathcal{E}_n(G)$ に対する構造定理.

定義 3.1

$$\mathfrak{M}(G) = \{N \in \mathfrak{N}(G) ;\ G/N \text{ が有限次元}\},$$

$$\mathfrak{M}_1(G) = \{N \in \mathfrak{N}(G) ;\ G/N \text{ が有限次元かつ separable}\}. \ \blacksquare$$

勿論, $\mathfrak{M}_0(G) \subseteq \mathfrak{M}_1(G) \subseteq \mathfrak{M}(G)$ である。G 自身が有限次元のときは、$\mathfrak{M}(G) = \mathfrak{N}(G)$ 。

次の補題が基本的である。

補題 3.1 $\mathcal{E}_1(G)$ の subset $\mathcal{B}$ が; 各 $\alpha \in R(G)$ について, 条件

$$\sup_{x \in G,\, f \in \mathcal{B}} |d_\alpha^{(r)} f(x)| < \infty$$

を満足するとせよ。このとき、$N \in \mathfrak{M}(G)$ が存在して, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{E}_1(G, N)$ となる。 $\blacksquare$

この補題を $\mathcal{E}_1(G)$ の任意 singleton $\{f\}$ に適用すれば, $f \in \mathcal{E}_1(G, N)$ for some $N \in \mathfrak{M}(G)$ が従う。これを少し精密にして、次の定理が得られる。

Theorem 2 任意の $f \in \mathcal{E}_1(G)$ において, $f \in \mathcal{E}_1(G, N)$ なる $N \in \mathfrak{M}_1(G)$ が存在する。 $\blacksquare$

これより直ちに,

Corollary $\mathcal{E}_n(G) = \bigcup \{\mathcal{E}_n(G, N) ;\ N \in \mathfrak{M}_1(G)\}$

$(n = \infty, 1, 2, \cdots)$.

この Corollary は空間 $\mathcal{E}_n(G)$ に対する構造定理とよぶのがふさわしい。

2) $\mathcal{D}(G)$と$\mathcal{E}_\infty(G)$の比較

前項の構造定理と，有限次元コンパクト群の構造定理から，次の定理を導ける。

Theorem 3　次の4条件は同値である。

(a) $\mathcal{E}_\infty(G)=\mathcal{D}(G)$.　(b) $\mathcal{H}_1(G)=\mathcal{H}_0(G)$.

(c) $\mathcal{H}(G)=\mathcal{H}_0(G)$.　(d) Gは局所連結.

注意　有限次元のGについては，

局所連結 $\Longleftrightarrow$ リー群または有限群.

結局，局所連結でない場合に，regularでないC^∞級関数が現れるわけである。そのような関数の具体例はFourier級数によって構成できる([2], §2)。しかし，$\mathcal{E}_\infty(G)$，$\mathcal{D}(G)$全体の把握は，Gが連結の場合であっても難しい問題のように思われる。

3) 位相的性質

構造定理によって，$\mathcal{E}_n(G)$には自然な順極限位相がはいる。これについて述べる。

$\alpha_1,\cdots\alpha_p,\beta_1,\cdots,\beta_q\in R(G)$ $(p,q\geq 0)$に対して，$\mathcal{E}_{p+q}(G)$上のseminorm $P^{\beta_1\cdots\beta_q}_{\alpha_1\cdots\alpha_p}$を次のように定義する：

$$P^{\beta_1\cdots\beta_q}_{\alpha_1\cdots\alpha_p}(f)=\sup_{x\in G}\left|d^{(r)}_{\alpha_1}\cdots d^{(r)}_{\alpha_p}d^{(l)}_{\beta_1}\cdots d^{(l)}_{\beta_q}f(x)\right|$$

$$(f\in\mathcal{E}_{p+q}(G)).$$

$n=\infty,1,2,\cdots$ に対して，

$$\mathfrak{F}_n^{(r)}=\{P_{\alpha_1\cdots\alpha_p};\ 0\le p<n+1,\ \alpha_1,\cdots,\alpha_p\in R(G)\},$$
$$\mathfrak{F}_n^{(\ell)}=\{P^{\beta_1\cdots\beta_q};\ 0\le q<n+1,\ \beta_1,\cdots,\beta_q\in R(G)\},$$
$$\mathfrak{F}_n=\{P_{\alpha_1\cdots\alpha_p}^{\beta_1\cdots\beta_q};\ 0\le p+q<n+1,\ \alpha_1,\cdots,\alpha_p,\beta_1,\cdots,\beta_q\in R(G)\}$$

とおく。seminorm族 $\mathfrak{F}_n^{(r)}$, $\mathfrak{F}_n^{(\ell)}$ 及び $\mathfrak{F}_n$ によって定義される $\mathcal{E}_n(G)$ の位相を，それぞれ，n に拘りなく，$\mathcal{T}_r, \mathcal{T}_\ell$ 及び $\mathcal{T}_+$ で表わす。$\mathcal{T}_r, \mathcal{T}_\ell$ より $\mathcal{T}_+$ が強い。写像 $f\longmapsto \check{f}$ (inversion) によって，$\mathcal{T}_r$ を備えた $\mathcal{E}_n(G)$ は $\mathcal{T}_\ell$ を備えた $\mathcal{E}_n(G)$ に位相線形同型にうつる。

<u>補題3.2</u> 位相 $\mathcal{T}_r, \mathcal{T}_\ell$ 及び $\mathcal{T}_+$ は，部分空間 $\mathcal{E}_n(G,N)$ $(N\in\mathfrak{N}(G))$ では一致して，その空間を Fréchet space にする。∎

この補題をふまえた上で，上記3位相よりもっと自然な順極限位相を導入する。$\mathfrak{N}(G)$ が下方有向族であることを注意しておく。

<u>定義3.1</u> $N\in\mathfrak{N}(G)$ に対して，$\mathcal{E}_n^{(+)}(G,N)$ で，$\mathcal{T}_+$ を備えた $\mathcal{E}_n(G,N)$ を表わす。$\{\mathcal{E}_n^{(+)}(G,N);\ N\in\mathfrak{N}(G)\}$ は Fréchet space の上有向族で，その合併は $\mathcal{E}_n(G)$ である (Theorem 2)。故に，$\mathcal{E}_n(G)$ を，この族の順極限であるように位相づけることができる。この位相を，n に拘りなく，$\mathcal{T}_*$ で表わす。$\mathcal{T}_*$ を備えた $\mathcal{E}_n(G)$ を $\mathcal{E}_n^{(*)}(G)$ とかく。∎

$\mathcal{E}_n^{(*)}(G)$ は，Fréchet spaces の順極限として，樽型かつ有界

型である。

<u>注意</u>　$\mathcal{E}_n(G)$ は，族 $\{\mathcal{E}_n^{(+)}(G, N); N \in \mathfrak{N}_1(G)\}$ の順極限であるように位相づけることもできる。しかし，この位相は τ_* に一致する。

補題3.1から，直ちに，

<u>Theorem 4</u>　$\mathcal{E}_n^{(*)}(G)$ の部分集合について，次の5条件は equivalent である：

τ_*-有界 $\Leftrightarrow$ τ_+-有界 $\Leftrightarrow$ τ_ℓ-有界 $\Leftrightarrow$ τ_r-有界 $\Leftrightarrow$
或る $\mathcal{E}_n^{(+)}(G, N)$ $(N \in \mathfrak{N}(G))$ の有界部分集合である。 ▮

こゝで，最後の条件における $\mathfrak{N}(G)$ を $\mathfrak{N}_1(G)$ でおきかえることはできない。実際，$\mathfrak{N}(G) \neq \mathfrak{N}_1(G)$ である場合には，$\mathcal{E}_\infty^{(*)}(G)$ の有界集合で，$\mathcal{D}(G)$ に含まれるが，どの $\mathcal{E}_\infty(G, N)$ $(N \in \mathfrak{N}_1(G))$ にも含まれないものが存在する。このため，τ_* の定義では，$\mathfrak{N}_1(G)$ ではなく，$\mathfrak{N}(G)$ をもちいた。

族 $\{\mathcal{E}_n^{(+)}(G, N); N \in \mathfrak{N}(G)\}$ に対する可算性の仮定なしに，「τ_*-有界 $\Longrightarrow$ 或る $\mathcal{E}_n^{(+)}(G, N)$ の部分集合」が成立することが，Theorem 4 の論点である。同じことが完備性についてもいえる。

<u>Theorem 5</u>　$\mathcal{E}_n^{(*)}(G)$ は完備である $(n = \infty, 1, 2, \cdots)$。 ▮

G が局所連結でないとき，空間 $\mathcal{E}_n^{(*)}(G)$ は Montel ではない，従って，核型でもない（∵ 完備かつ核型であるから）。

最後に，$\mathfrak{T}(G)$ を trigonometric polynomial 全体の集合として，

$$\mathcal{T}(G,N) = \mathcal{T}(G) \cap \mathcal{E}_\infty(G,N)$$

とおく（$N \in \mathcal{N}(G)$）。

<u>Theorem 6</u> 各 $N \in \mathcal{N}(G)$ と $n = \infty, 1, 2, \cdots$ において、$\mathcal{T}(G,N)$ は $\mathcal{E}_n^{(+)}(G,N)$ で dense。 ∎

勿論、この定理から、「$\mathcal{T}(G)$ は $\mathcal{E}_n^{(+)}(G)$ で dense」は従う。これは、torus における Weierstrass 近似定理の一般化である。

文献

[1] F. Bruhat, Distributions sur un groupe localement compact et applications à l'étude des représentations des groupes p-adiques, Bull. Soc. Math. France, 89 (1961).

[2] T. Edamatsu, Spaces of differentiable functions on compact groups, to appear.

[3] K. Mckennon, The structure space of the trigonometric polynomials on a compact group, J. Reine Angew. Math., 307/308 (1979).

[4] J. Riss, Éléments de calcul différentiel et théorie des distributions sur les groupes abéliens localement compacts, Acta Math., 89 (1953).